出題範囲： ● 数学Ⅰ、数学A

2015年度 一般入試A日程 試験問題

時　　間： 60分

問題1

(1) 次の式を因数分解しなさい。

① $2x^2-2y^2+3xy-4x+7y-6$
$=(x+\boxed{\text{ア}}y-\boxed{\text{イ}})(\boxed{\text{ウ}}x-y+\boxed{\text{エ}})$

② $4a^2+9b^2-12ab+12bc-8ca=(\boxed{\text{オ}}a-\boxed{\text{カ}}b)(\boxed{\text{キ}}a-\boxed{\text{ク}}b-\boxed{\text{ケ}}c)$

(2) $a>0$ とする。$\sqrt{(2a-3)^2}+\sqrt{(4a+1)^2}$ を簡単にすると，

$0<a\leqq\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ のとき，$\boxed{\text{シ}}a+\boxed{\text{ス}}$

$a>\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ のとき，$\boxed{\text{セ}}a-\boxed{\text{ソ}}$

である。

(3) a は実数の定数である。x についての連立不等式 $\begin{cases}x-3a>2\\2x-1>3(x-3)\end{cases}$ ……(A)がある。

① (A)の解が存在しないような a の値の範囲は，$a\geqq\boxed{\text{タ}}$ である。

② (A)の解に含まれる整数が1つだけであるような a の値の範囲は，
$\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}\leqq a<\dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ である。

(4) x を実数とする。次の $\boxed{\text{ナ}}$ にあてはまるものを，下の1．～4．の中から選べ。
$3x^2+16x-12>0$ であることは，$x>1$ であるための $\boxed{\text{ナ}}$。

1．必要条件であるが，十分条件ではない
2．十分条件であるが，必要条件ではない
3．必要十分条件である
4．必要条件，十分条件のいずれでもない

問題2

$$y=-\frac{1}{2}x^2-2x+1$$

のグラフを C_1 とする。C_1 を x 軸方向に $a-3$，y 軸方向に a だけ平行移動して得られるグラフを C_2 とする。ただし，a は定数である。

(1) C_1 と x 軸の交点を A，B とすると，線分 AB の長さは $\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}$ である。

(2) C_2 の頂点の座標は，$(a-\boxed{\text{ウ}},\ a+\boxed{\text{エ}})$ である。
また，C_2 が x 軸に接するとき，$a=\boxed{\text{オカ}}$ であり，接点の x 座標は $\boxed{\text{キク}}$ である。

(3) C_2 が y 軸の正の部分と交わるような a の値の範囲は，

$\boxed{\text{ケ}}-\sqrt{\boxed{\text{コサ}}}<a<\boxed{\text{シ}}+\sqrt{\boxed{\text{スセ}}}$

である。

(4) C_2 を表す2次関数を $f(x)$ とおくと，すべての実数 x に対して $f(x)<0$ が成り立つような a の値の範囲は，

$a<\boxed{\text{ソタ}}$

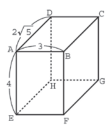
である。

問題3

(1) $0^\circ<\theta<180^\circ$ とする。$4\sin\theta+3\cos\theta=0$ のとき，$\sin\theta=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ であり，

$\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{\boxed{\text{ウエオ}}}{\boxed{\text{カキ}}}$ である。

(2) 右の図のような $\mathrm{AB}=3$，$\mathrm{AD}=2\sqrt{5}$，$\mathrm{AE}=4$ である直方体 ABCD−EFGH がある。



① $\cos\angle\mathrm{BED}=\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケコ}}}$ である。

② △EBD の面積は $\sqrt{\boxed{\text{サシス}}}$ である。

③ 点 A から平面 EBD に下ろした垂線を AI とすると，$\mathrm{AI}=\dfrac{\boxed{\text{セソ}}\sqrt{\boxed{\text{タチツ}}}}{\boxed{\text{テトナ}}}$ である。

問題4

袋の中に青球3個，白球2個，赤球1個の合わせて6個の球が入っている。この中から1個の球を取り出し，色を確かめてから袋に戻す。これを1回の試行とする。

座標平面上に点 P があり，次の規則に従って点 P を動かす。

〈規則〉取り出された球が
　　青球のときは x 軸の正の向きに1だけ進み，
　　白球のときは y 軸の正の向きに1だけ進み，
　　赤球のときは x 軸の正の向きに−1だけ進む。

また，最初，点 P は原点にあるとする。

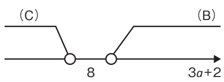
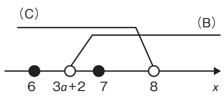
(1) この試行を3回くりかえしたあと，点 P の座標が（2，1）である確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。

(2) この試行を3回くりかえしたあと，点 P の座標が（0，1）である確率は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。

(3) この試行を3回くりかえしたあと，点 P の y 座標が0である確率は $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カキ}}}$ である。

(4) この試行を5回くりかえしたあと，点 P の座標が（2，1）である確率は $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケコ}}}$ であり，5回目に初めて点 P が（2，1）にある確率は $\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シス}}}$ である。

解答・配点

問題	設問		正解	配点	解説
問題1 25点	(1)	ア	②	4	$2x^2-2y^2+3xy-4x+7y-6$ $=2x^2+(3y-4)x-(2y^2-7y+6)$ $=2x^2+(3y-4)x-(2y-3)(y-2)$ $=\{x+(2y-3)\}\{2x-(y-2)\}$ $=(x+2y-3)(2x-y+2)$
		イ	③		
		ウ	②		
		エ	②		
		オ	②	4	$4a^2+9b^2-12ab+12bc-8ca$ $=4a^2-12ab+9b^2+4c(3b-2a)$ $=(2a-3b)^2-4c(2a-3b)$ $=(2a-3b)(2a-3b-4c)$
		カ	③		
		キ	②		
		ク	③		
		ケ	④		
	(2)	コ	③	2	$\sqrt{(2a-3)^2}+\sqrt{(4a+1)^2}=\|2a-3\|+\|4a+1\|$ $a>0$のとき、$4a+1>0$ より $\|4a+1\|=4a+1$ $2a-3\leqq 0$ すなわち、$0<a\leqq\frac{3}{2}$のとき、 $\|2a-3\|=-(2a-3)=-2a+3$ よって、 $\sqrt{(2a-3)^2}+\sqrt{(4a+1)^2}=-2a+3+4a+1$ $=2a+4$ $a>\frac{3}{2}$のとき、 $\|2a-3\|=2a-3$ よって、 $\sqrt{(2a-3)^2}+\sqrt{(4a+1)^2}=2a-3+4a+1$ $=6a-2$
		サ	②		
		シ	②	2	
		ス	④		
		セ	⑥	2	
		ソ	②		
	(3)	タ	②	3	$\begin{cases} x-3a>2 \cdots\cdots (B) \\ 2x-1>3(x-3) \cdots\cdots (C) \end{cases}$ とおく。 (B)より、$x>3a+2$ (C)より、$2x-1>3x-9$ $-x>-8$　$x<8$ (A)の解が存在しないaの値の範囲は、 $3a+2\geqq 8$ $a\geqq 2$ 
		チ	④	3	(A)の解に含まれるただ1つの整数は7であるから、 $6\leqq 3a+2<7$ $4\leqq 3a<5$ $\frac{4}{3}\leqq a<\frac{5}{3}$ 
		ツ	③		
		テ	⑤		
		ト	③		
	(4)	ナ	①	5	$3x^2+16x-12>0$ $(x+6)(3x-2)>0$ $x<-6,\ \frac{2}{3}<x$ これより、「$3x^2+16x-12>0 \Rightarrow x>1$」は $x=-7$が反例となるので、偽であり、 「$x>1 \Rightarrow 3x^2+16x-12>0$」は真である。 よって、$3x^2+16x-12>0$であることは、 $x>1$ であるための必要条件であるが、 十分条件ではない。

問題	設問		正解	配点	解説
問題2 25点	(1)	ア	②	5	$-\frac{1}{2}x^2-2x+1=0$ $x^2+4x-2=0$ $x=-2\pm\sqrt{6}$ より、 $y=-\frac{1}{2}x^2-2x+1$のグラフと x軸の交差点のx座標は、 $-2+\sqrt{6}$, $-2-\sqrt{6}$ よって、線分ABの長さは、 $-2+\sqrt{6}-(-2-\sqrt{6})=2\sqrt{6}$
		イ	⑥		
	(2)	ウ	⑤	4	$y=-\frac{1}{2}x^2-2x+1$ $=-\frac{1}{2}(x+2)^2+3$ より、グラフC_1の頂点の座標は、$(-2,3)$である。 よって、グラフC_2の頂点の座標は、$(a-5,a+3)$である。 C_2がx軸に接するとき、頂点のy座標が0より、 $a+3=0$　　$a=-3$ 接点はC_2の頂点だから、そのx座標は、 $a-5=-3-5=-8$
		エ	③		
		オ	ー	3	
		カ	③		
		キ	ー	3	
		ク	⑧		
	(3)	ケ	⑥	5	C_2を表す2次関数の式は、 $y=-\frac{1}{2}\{x-(a-5)\}^2+a+3$ y軸との交点のy座標は、$x=0$を代入して、 $y=-\frac{1}{2}(a-5)^2+a+3$　$=-\frac{1}{2}a^2+6a-\frac{19}{2}$ よって、C_2がy軸の正の部分と交わるとき、 $-\frac{1}{2}a^2+6a-\frac{19}{2}>0$ $a^2-12a+19<0$ より、求めるaの値の範囲は、$6-\sqrt{17}<a<6+\sqrt{17}$
		コ	①		
		サ	⑦		
		シ	⑥		
		ス	①		
		セ	⑦		
	(4)	ソ	ー	5	$f(x)=-\frac{1}{2}\{x-(a-5)\}^2+a+3$ より、$f(x)$の最大値は$a+3$だから $a+3<0$ $a<-3$
		タ	③		

解答・配点

設問			正解	配点	解説
問題3 25点	(1)	ア	③	5	$4\sin\theta+3\cos\theta=0$ より、 $\cos\theta=-\frac{4}{3}\sin\theta$ であり、これを $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に代入して、 $\sin^2\theta+\frac{16}{9}\sin^2\theta=1$ $\sin^2\theta=\frac{9}{25}$ $0°<\theta<180°$ より、$\sin\theta>0$ だから、$\sin\theta=\frac{3}{5}$ また、$\cos\theta=-\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{5}=-\frac{4}{5}$ だから、 $\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta}$ $=\frac{5}{3}\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)=-\frac{25}{12}$
		イ	⑤		
		ウ	ー	5	
		エ	②		
		オ	⑤		
		カ	①		
		キ	②		
	(2)	ク	⑧	5	三平方の定理より、 $BD=\sqrt{3^2+(2\sqrt{5})^2}=\sqrt{29}$ $DE=\sqrt{(2\sqrt{5})^2+4^2}=\sqrt{36}=6$ $EB=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$ △EBDについて余弦定理より、 $\cos\angle BED=\frac{5^2+6^2-(\sqrt{29})^2}{2\cdot5\cdot6}=\frac{8}{15}$
		ケ	①		
		コ	⑤		
		サ	①	5	$0°<\angle BED<180°$ より、$\sin\angle BED>0$ だから、 $\sin\angle BED=\sqrt{1-\left(\frac{8}{15}\right)^2}=\frac{\sqrt{161}}{15}$ △EBDの面積は、 $\frac{1}{2}\cdot5\cdot6\cdot\frac{\sqrt{161}}{15}=\sqrt{161}$
		シ	⑥		
		ス	①		
		セ	①	5	三角錐EABDの体積は、△ABDを底面とみると、 $\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot3\cdot2\sqrt{5}\right)\cdot4=4\sqrt{5}$ よって、 $\frac{1}{3}\cdot\sqrt{161}\cdot AI=4\sqrt{5}$ $AI=\frac{12\sqrt{5}}{\sqrt{161}}=\frac{12\sqrt{805}}{116}$
		ソ	②		
		タ	⑧		
		チ	⓪		
		ツ	⑤		
		テ	①		
		ト	⑥		
		ナ	①		

設問			正解	配点	解説
問題4 25点					1回の試行において、 x軸の正の向きに1だけ進む事象をRとすると、 その確率は、$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ y軸の正の向きに1だけ進む事象をUとすると、 その確率は、$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ x軸の正の向きに−1だけ進む事象をLとすると、 その確率は、$\frac{1}{6}$
	(1)	ア	①	5	3回の試行において、 Rが2回、Uが1回起こる場合だから、求める確率は、 ${}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$
		イ	④		
	(2)	ウ	①	5	3回の試行において、 R、L、Uが1回ずつ起こる場合だから、求める確率は、 $3!\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$
		エ	⑥		
	(3)	オ	⑧	5	3回くりかえしたあと、点Pのy座標が0となるのは、 RまたはLしか起こらない場合だから、 $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)^3=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$
		カ	②		
		キ	⑦		
	(4)	ク	⑤	5	5回くりかえしたあと、(2,1)にあるのは、Uが1回、 Rが3回、Lが1回起こる場合だから、求める確率は、 $\frac{5}{3!1!1!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{36}$ このうち、(2,1)にあるのが初めてではないのは、 3回くりかえしたあと(2,1)にあり、そのあとRとLが 1回ずつ起こる場合だから、その確率は、(1)を用いて、 $\frac{1}{4}\times{}_2C_1\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{24}$ よって、5回目に初めて(2,1)にある確率は、 $\frac{5}{36}-\frac{1}{24}=\frac{7}{72}$
		ケ	③		
		コ	⑥		
		サ	⑦	5	
		シ	⑦		
		ス	②		

出題内容

数学の範囲は「数学Ⅰ」「数学A」です。各問題は、高校での履修内容の範囲に入るように出題しています。またセンター試験の内容と形式を参考にしています。

「問題1」は、いずれも「数と式」での学習を問うものです。因数分解、根号を含む式の計算、連立不等式、命題と条件から出題しました。「問題2」は、「2次関数の平行移動」の問題であり、2次関数の性質をよく理解しておけば解くことができます。「問題3」は、図形と計量の問題ですが、三角関数とその定理をよく理解しておけば解くことができます。三角関数の使い方に慣れておきましょう。「問題4」は場合の数と確率の問題です。考え方の基本を理解し、丁寧に組み合わせの種類を考えていくことが大切です。

講評

各問題は基礎的な小問から応用力を必要とする小問へと進む構成になっています。応用力を必要とする小問に時間をかけすぎて、時間切れになった場合がありました。まずは各問題の基礎的な小問を先に解き、残った時間で応用力を必要とする小問を解くことが高得点をとるための近道になるかもしれません。

学習のポイント

高校での履修内容の範囲内で出題しますので、高校での「数学Ⅰ」「数学A」の学習を振り返る必要があります。教科書の内容をしっかり理解し、教科書の演習問題を解くことによって、基本的な力を身につけます。まずはこの基礎的な学習に十分な時間を使うことが大切です。その上で、センター試験の「数学Ⅰ･A」を目指した問題集を基本知識の確認とともに解いていくのが最も効果的な学習だと思います。